УДК 537.8

И.В. Боровин,
системный администратор ООО «Огнерус»
(г. Екатеринбург)
В.И. Лебухов,
канд. техн. наук,
доцент кафедры товароведения торгово-технологического факультета
Хабаровского государственного университета экономики и права

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ КАК ОСНОВА ПРИРОДЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Действие рассматривается не как математический функционал, а как реальный физический процесс воздействия одного материального объекта на другой, при этом лагранжиан приобретает значение интенсивности действия. В общем случае действие можно разделить на точечное и объемное, и тогда на него накладываются два требования: релятивистская инвариантность и релятивистское запаздывание действия. Этих операций достаточно, чтобы на основе преобразований Лоренца доказать, что лагранжиан точечного действия является полным (расширенным) выражением электромагнитного лагранжиана, потенциалы которого с точностью до постоянного множителя совпадают с запаздывающими потенциалами Лиенара-Вихерта. Объемный лагранжиан может быть трактован как лагранжиан гравитационного взаимодействия.

Ключевые слова: *принцип наименьшего действия, инвариантность действия, точечное взаимодействие, электромагнитный лагранжиан, потенциалы Лиенара-Вихерта.*

The action is considered not as a mathematical function, but as a real physical process of the impact of one material object on another, while Lagrangian acquires the value of the action's intensity. Generally, the action can be divided into point and volume aspects, and then two requirements are imposed on it: relativistic invariance and relativistic delay of the action. These operations are sufficient to prove (on the Lorentz transformations basis) that Lagrangian point is the full (expanded) expression of the electromagnetic Lagrangian. Its potentials, up to a constant multiplier, coincide with the retarded Lienar-Wiechert potentials. Voluminal Lagrangian can be interpreted as the Lagrangian of the gravitational interaction.

Keywords: *least action principle, invariance of action, point interaction, electromagnetic Lagrangian, Lienard-Wichert potentials.*

1. Обоснование задачи

Изложение основ классической электродинамики в современных учебных курсах не пересматривалось с начала XX в., несмотря на утрату своего гидромеханического обоснования, основанного на существовании «мирового эфира» после появления специальной теории относительности. Мировым научным сообществом электродинамика в концепции уравнений Максвелла молчаливо была признана фактом, не нуждающимся в обосновании. Законы первооткрывателей электромагнетизма описывали внешние проявления происходящих процессов с помощью геометрических построений (Фарадей) и простых математических соотношений. Все эти описания были блестяще обобщены Максвеллом и окончательно Лоренцем в дифференциальные уравнения, которые стали основой теории электромагнитных явлений и навсегда ею останутся. Но физические модели самой природы электромагнетизма, в том числе и предлагаемые Максвеллом, были основаны на механических, гидравлических и других «передаточных» представлениях. Как это ни удивительно, но и после открытия теории относительности, уничтожившей теорию эфира и ей сопутствующие, не были разработаны убедительные обоснования природы электромагнитных явлений в классическом понимании, а появление квантовой электродинамики окончательно охладило интерес к их поиску.

Математический аппарат Максвелла-Лоренца безукоризненно описывает все известные проявления электромагнетизма, поэтому вполне логично было принято решение принять его за самостоятельный закон природы приблизительно в следующей трактовке: «Уравнения электромагнитного поля или уравнения Максвелла-Лоренца не могут быть выведены из других законов природы. По существу, они являются выражением одного из фундаментальных законов природы. Обоснованием опирающейся на них электромагнитной теории является её согласие с опытом в необычайно обширной области применений…» [1]. Результатом такого подхода стала повторяющаяся более века в руководствах и учебниках по теоретической электродинамике констатация сложившегося статуса: «Эта теория феноменологическая. Это означает, что она создана на основе предположений и наблюдений и не рассматривает причину, вызывающую возникновение электрических и магнитных полей» [1].

Ограничиваясь только описанием внешних проявлений полей и не рассматривая причины их возникновения, классическая электродинамика остаётся подвешенной за свою математическую вершину в пустоте и не опирается на надёжный физический фундамент. Она, в частности, оторвана от механики действия поля на заряженную частицу, в связи с чем замкнутая теория электродинамики в уравнениях Максвелла-Лоренца образуется только после присоединения к ним выражения для силы Лоренца, которая не является прямым следствием уравнений поля. Настоящая работа доказывает, что электромагнитное взаимодействие имеет свою «причину», собственный фундамент, доказательство существования которого опирается на основополагающий принцип всех физических теорий – принцип наименьшего (стационарного) действия. В качестве демонстрации такого фундамента последовательное изложение теории электромагнетизма начинают с принципа наименьшего действия (например, [2, § 16, § 27]). Но это при пристальном рассмотрении оказывается имитацией фундаментальности подхода, потому что электромагнитный лагранжиан собирается из потенциалов или элементов тензора электромагнитного поля, которые появляются не как самостоятельные физические понятия, а как искусственно вводимые математические параметры для упрощения и систематизации работы с дифференциальными уравнениями Максвелла.

Специальная теория относительности (СТО), предпосылкой к появлению которой была электродинамика Максвелла-Лоренца, открыла возможность нового подхода к принципу наименьшего действия для фундаментальных взаимодействий. Законы СТО позволяют представлять (понимать) действие не как математический функционал, а как реальный физический процесс взаимодействия материальных объектов. В этом случае для фундаментальных взаимодействий отпадает необходимость придумывать форму лагранжиана, которая в случае электромагнитного взаимодействия сформируется автоматически исходя из предположения о точечном характере действия и требования инвариантности величины действия.

В физике (в том числе и в квантовой теории) релятивистская инвариантность величины действия изначально принята за аксиому и подтверждена существующими теоретическими и практическими следствиями. Поэтому приведённые в статье качественные доказательства инвариантности действия через кванты поля действия насыщают физическим смыслом протекающие процессы, но не оказывают решающего влияния на полученные результаты. За истекшие сто лет в приоритеты научных исследований никогда не входили фундаментальные основы классической электродинамики, поэтому ссылки на литературу приведены по каноническим текстам классиков теоретической физики [2; 3].

Подчеркнём, что в статье речь не идёт о какой-то альтернативной модели электродинамики, а только о подведении фундамента под существующую теорию, на вершине которой незыблемо остаются дифференциальные уравнения Максвелла-Лоренца. Безусловно, все итоги должны быть и будут получены в рамках классической (не квантовой) физики.

Для полной прозрачности излагаемого материала релятивистские преобразования выполняются в 3-мерной форме, без привлечения аппарата 4-мерного и тензорного анализа, хотя на самом деле выкладки настолько просты, что применять такой аппарат просто негде.

2. Терминология, определения

Добавим к постулатам СТО утверждение о возможности действия в вакууме одного материального объекта на другой, с величиной пропорциональной интенсивности и времени действия. В самом общем случае дифференциал такого действия будет выражаться уравнением:

$$dS = Ldt\,, \quad (2.1)$$

где dS, это числовая величина действия за время dt; L– интенсивность действия с размерностью частоты: dim L = $\mathbf{T}^{-1}$. По аналогии с классической механикой величину S назовем *действием*, а интенсивность L – *лагранжианом*. Далее под лагранжианом, если это не будет оговариваться особо, понимаем лагранжиан взаимодействия двух объектов. В качестве взаимодействующих объектов рассмотрим в инерциальной системе отсчёта (ИСО) две удалённые друг от друга частицы – материальные точки. Будем рассматривать модель одностороннего действия одной частицы – *источника* действия, движущейся по своей независимой траектории, на вторую – *приёмник* действия. Процесс действия происходит так: на приемник, находящийся в момент времени t в точке $\mathbf{r}$ (далее для краткости эту ситуацию будем обозначать как «точка (t, $\mathbf{r}$)») оказывается некое действие, причиной которого является источник, находившийся в какой-то точке (t_0, $\mathbf{r}_0$) своей траектории. Время t назовем временем *приёма действия*, время t_0 – временем *передачи действия*.

Согласно принципу причинности, источник, находившийся в точке (t_0, $\mathbf{r}_0$), может оказать действие на приёмник в точке (t, $\mathbf{r}$) через время $(t - t_0)$, не меньшее, чем время распространения светового сигнала от $\mathbf{r}_0$ до $\mathbf{r}$.

Для релятивистски инвариантного фундаментального действия запаздывание точно равно этому времени:

$$T_D = t - t_0 = \frac{R}{c}, \quad (2.2)$$

здесь $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ – *расстояние действия*; T_D – время запаздывания, равное времени прохождения луча света от $\mathbf{r}_0$ к $\mathbf{r}$.

Любое релятивистское взаимодействие с запаздыванием (2.2) неизбежно требует наличия физического материального объекта, передающего это действие. В данном случае назовём этот объект *полем действия*. Согласно (2.2), поле действия распространяется со скоростью света. В течение времени T_D не важно положение или вообще наличие источника или приёмника. В любом случае приёмник в точке (t, $\mathbf{r}$) получит действие поля, величина которого определена параметрами источника в точке (t_0, $\mathbf{r}_0$).

Важно отметить, что для любой точки (t, $\mathbf{r}$) точка (t_0, $\mathbf{r}_0$) уравнением (2.2) определяется однозначно, потому что на траектории источника, движущегося со скоростью, меньшей скорости света, не найдётся двух разных точек, свет от которых придёт в $\mathbf{r}$ в одно и то же время. Эта однозначность делает правомерным использование далее не только величины R, но и вектора $\mathbf{R}$.

3. Точечное и объемное взаимодействие

Далее мы будем работать в двух ИСО, из которых наблюдается один и тот же процесс действия: передача действия из точки (t_0, $\mathbf{r}_0$)и приём действия в точке (t, $\mathbf{r}$). Эти координаты заданы для исходной неподвижной системы, которую обозначим как $\mathbf{\Omega}$.

Пусть в $\mathbf{\Omega}$ в момент передачи действия источник двигался со скоростью $\mathbf{V}$, а приёмник в момент приёма действия – со скоростью $\mathbf{v}$. Кроме скоростей, лагранжиан может зависеть от расстояния действия R (2.2).

Внутренние параметры частиц не меняются, поэтому лагранжиан является функцией трёх переменных:

$$L = L(\mathbf{V}, \mathbf{v}, R). \quad (3.1)$$

В качестве второй ИСО рассмотрим систему $\mathbf{\Omega'}$ движущуюся относительно $\mathbf{\Omega}$ со скоростью источника $\mathbf{V}$. В этой системе источник в момент передачи действия был неподвижен, поэтому можно назвать $\mathbf{\Omega'}$ *собственной системой* источника.

Скорость приёмника в момент приёма действия в $\mathbf{\Omega'}$ обозначим как $\mathbf{v}'$.Процесс приёма-передачи действия в $\mathbf{\Omega'}$ определяется лагранжианом L', зависящим только от двух параметров:

$$L' = L'(\mathbf{v}', R'), \quad (3.2)$$

где R' – расстояние действия, определяемое в системе $\mathbf{\Omega'}$ по формуле запаздывания аналогичной (2.2):

$$T'_D = t' - t'_0 = \frac{R'}{c}, \quad (3.3)$$

где T'_D – время запаздывания в $\mathbf{\Omega'}$; t'_0, t' – время передачи и приёма действия соответственно.

Рассмотрим вариант, когда в $\mathbf{\Omega'}$ приёмник в момент приёма действия тоже был неподвижен: $\mathbf{v}' = 0$.Тогда лагранжиан (3.2) будет зависеть только от R' из (3.3).

С учётом того, что по определению он должен иметь размерность частоты, его величину, используя параметры (3.3), можно будет выразить единственным способом:

$$L' = \frac{\mu}{T'_D} = \mu \frac{c}{R'}, \quad (3.4)$$

где μ – безразмерный коэффициент пропорциональности, включающий в себя произведение постоянных параметров взаимодействующих частиц.

Конечно, опираясь на размерность, можно только постулировать нужный результат, что мы и делаем, но в данном случае при отсутствии каких-либо скоростей, кроме скорости света, других вариантов в рамках единиц СТО нет.

Формула (3.4) определяет действие неподвижного источника на неподвижный приёмник. Или можем сейчас сказать, что приёмник находится в стационарном поле действия источника. Вернемся к лагранжиану (3.2), когда $\mathbf{v}' \neq 0$. Как в этом случае изменится выражение (3.4)? Если приёмник несёт с собой какой-то эффективный объём взаимодействия с полем, то при движении надо учесть релятивистское сокращение этого объёма. В общем случае в лагранжиан следует включить линейную комбинацию двух вариантов.

1-й вариант. *Точечное взаимодействие*. Когда нет эффективного пространственного объема взаимодействия, а величину действия определяет только сам факт нахождения приёмника в данной точке собственной системы источника, то в этом случае вид лагранжиана (3.4) не изменится, и мы просто перепишем его в виде:

$$L'_\alpha = \alpha \frac{c}{R'}, \quad (3.5)$$

где L'_α – *точечный лагранжиан*; α – коэффициент пропорциональности, включающий в себя произведение постоянных параметров точечного взаимодействия приёмника и источника.

2-й вариант. *Объёмное взаимодействие*. Когда приёмник имеет эффективный пространственный объём взаимодействия с полем источника, тогда при движении этот эффективный объём следует умножить на $\sqrt{1-v^2/c^2}$ из-за релятивистского сокращения. В этом случае (3.4) перепишется в виде:

$$L'_\beta = \beta \frac{c}{R'} \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}, \quad (3.6)$$

где L_β – *объёмный лагранжиан*; $v' = |\mathbf{v}'|$; β – коэффициент пропорциональности, включающий в себя произведение постоянных параметров объёмного взаимодействия приёмника и источника. Отметим, что эти автономные определения, *точечное* и *объемное*, относятся именно к механизму взаимодействия, а не к размерам частиц. В общем случае приёмник испытывает оба вида взаимодействия.

Расстояние действия R' определено в собственной системе $\mathbf{\Omega}'$, движущейся относительно исходной со скоростью $\mathbf{V}$. Найдем связь между R' и R, которая понадобится нам в дальнейшем. С помощью преобразования Лоренца для времени T'_D через T_D будет выражаться как: $T'_D = \dfrac{T_D - \dfrac{\mathbf{VR}}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$. Представив T'_D и T_D в явном виде, используя (2.2) и (3.3), получим формулу расчёта расстояния действия в собственной системе источника:

$$R' = \frac{R - \dfrac{\mathbf{VR}}{c}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad (3.7)$$

4. Релятивистская инвариантность действия

Детализируем свойства поля действия, безусловное присутствие которого обсуждалось в *разделе 2*. Будем считать, что действие источника передаётся приёмнику через поле действия стандартными (счётными) *квантами действия* величиной (абсолютная величина действия в классике не имеет значения, так как в результате всё сводится к дифференциальным уравнениям движения), например ±1.Тогда лагранжиан L – это частота поступления квантов действия с учётом знака. Соответственно величина действия Ldt, количество квантов (тоже с учётом знака), – очевидный релятивистский инвариант. Вернемся к рассматриваемому в предыдущем разделе процессу действия, наблюдаемому из исходной $\mathbf{\Omega}$ и собственной $\mathbf{\Omega}'$ систем отсчёта.

Условие инвариантности действия для лагранжианов (3.1) и (3.2) запишется в виде:

$$Ldt = L'dt'. \quad (4.1)$$

Если ранее при выводе формулы (3.7) рассматривались два события – передача и приём действия, то здесь в (4.1) объектом рассмотрения является приёмник действия, его движение в поле действия. Направим ось X по направлению скорости $\mathbf{V}$, тогда преобразование Лоренца для времени dt' в собственной системе $\mathbf{\Omega}'$ через время dt в исходной системе $\mathbf{\Omega}$ запишется в виде:

$$dt' = \frac{dt - \dfrac{V}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad (4.2)$$

где $V = |\mathbf{V}|$. Учитывая, что $dx = v_x dt$; $v_x V = \mathbf{vV}$; из (4.2) получаем:

$$dt' = dt\frac{1 - \dfrac{\mathbf{vV}}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.3)$$

Подставив (4.3) в (4.1), получим соотношение между лагранжианами: $L = L'\dfrac{1-\dfrac{\mathbf{vV}}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$.

Заменив L' на уравнение точечного лагранжиана в собственной системе источника (3.5), получим:

$$L_\alpha = \alpha\frac{c}{R'}\frac{1-\dfrac{\mathbf{vV}}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad (4.4)$$

где L переименовано в L_α, – точечный лагранжиан.

Для объёмного лагранжиана из-за радикала в (3.6)

удобнее использовать другое преобразование.

Учитывая, что $dt = d\tau\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}$; $dt' = d\tau\Big/\sqrt{1-v'^2/c^2}$, где τ – собственное время в системе отсчёта приёмника, из (4.1) получим промежуточное уравнение:

$$L = L'\frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}, \quad (4.5)$$

где $v = |\mathbf{v}|$; $v' = |\mathbf{v}'|$.

Заменяя в (4.5) L' на выражение для объёмного лагранжиана(3.6), получаем уравнение:

$$L_\beta = \beta\frac{c}{R'}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad (4.6)$$

здесь L переименовано в L_β, – объёмный лагранжиан.

Остаётся в уравнениях (4.4) и (4.6) заменить расстояния действия R' в собственной системе отсчёта на полученное ранее выражение через R в исходной системе (3.7). В результате сформируются окончательные выражения лагранжианов:

– лагранжиан точечного действия: $L_\alpha = \alpha\dfrac{c\left(1-\dfrac{\mathbf{vV}}{c^2}\right)}{R-\dfrac{\mathbf{VR}}{c}}$; (4.7)

– лагранжиан объемного действия: $L_\beta = \beta \dfrac{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{R-\dfrac{\mathbf{VR}}{c}}$. (4.8)

В принципе, задача решена. Уравнение (4.7) является полным, в форме $\alpha(\varphi - \mathbf{vA})$, выражением электромагнитного лагранжиана двух частиц через потенциалы Лиенара-Вихерта [2: (63.5)]. Осталось только перейти от безразмерного коэффициента α к реальным единицам измерения. Это будет сделано в дальнейшем изложении.

Легко убедиться, что знак лагранжианов (4.7) и (4.8) определяется исключительно коэффициентами α и β, зависящими от постоянных параметров пары приёмник – источник. Никакие изменения величин и/или направлений векторов **V**, **v**, **R**, не меняют знак лагранжианов. Это является аргументом в пользу версии обмена квантами действия, рассмотренной в начале раздела. Тот факт, что лагранжиан никогда не меняет знак, означает, что любая пара приёмник – источник обменивается квантами только одного знака, и в этом случае вполне допустимо считать лагранжиан частотой обмена (с учётом знака кванта). Механизм взаимодействия (4.7), (4.8) определен только для одной пары приёмник-источник. Суммарный лагранжиан для нескольких частиц-источников может, конечно, менять свой знак по ходу движения, но об этом ниже.

5. Свойства точечного взаимодействия

Как мы уже отметили выше, точечный лагранжиан (4.7) соответствует лагранжиану электромагнитного взаимодействия двух частиц. Для перехода к обычному виду в единицах SGS достаточно заменить коэффициент α на электромагнитный коэффициент:

$$\alpha \Rightarrow \frac{e_r e}{c}, \quad (5.1)$$

где e_r, e – электрические заряды приёмника и источника соответственно. В данном случае знак нашего гипотетического кванта действия будет положительным при одноименно заряженных частицах и отрицательным при разноименных.

По существу, замена (5.1) ничего не меняет в дальнейших выкладках, но мы должны сделать эту замену, чтобы иметь возможность сравнивать наши выкладки с общеизвестными результатами.

Подставим (5.1) в (4.7) и сгруппируем получившуюся правую часть уравнения в виде электромагнитного лагранжиана L_α (в классическом виде лагранжиана эта потенциальная часть записывается со знаком «минус»):

$$L_\alpha = e_r\varphi - \frac{e_r}{c}\,\mathbf{vA}\,, \quad (5.2)$$

где символами φ и **A** обозначены компоненты поля действия источника, так называемые скалярный и векторный потенциалы, определённые, согласно (4.7), в единицах SGS:

$$\varphi = \frac{e}{R - \frac{\mathbf{VR}}{c}}; \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{V}}{c\left(R - \frac{\mathbf{VR}}{c}\right)}. \quad (5.3)$$

Здесь φ и **A** – значения потенциалов в момент времени приёма действия t; e – электрический заряд источника; **V**– скорость источника в момент передачи действия t_0; $R = |\mathbf{R}|$ – расстояние действия.

Величины t, t_0, R связаны уравнением запаздывания действия (2.2). Время приёма действия t – это исходное время или время измерения. Время передачи действия t_0 связанное с t через (2.2) обычно обозначается как t', но из-за работы с движущимися системами отсчёта нам такое обозначение не подходит. Соотношения (5.3) являются выражениями запаздывающих потенциалов Лиенара-Вихерта. Это потенциалы поля одного точечного источника, и в этом отношении можно их называть *элементарными потенциалами*.

Теперь можно убедиться, что их вид в точности совпадает с полученными различными путями выражениями, например [2: (63.5)], [3: (21.33), (21.34)].

Покажем, что потенциалы в (5.2) являются элементами контравариантного 4-вектора $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, что и позволит применять к ним в дальнейшем методы 4-векторного и тензорного анализа. Для этого найдем квадрат элементарного потенциала (5.3):

$$A^i A_i = \varphi^2 - \mathbf{A}^2 = e^2 \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{R - \frac{\mathbf{VR}}{c}} = \frac{e^2}{R'^2}. \quad (5.4)$$

Здесь на последнем шаге использовано равенство (3.7), где расстояние действия R' взято в собственной системе отсчёта источника, откуда следует, что квадрат A^i не зависит от выбора системы отсчёта, и элементарные потенциалы (φ, **A**) образуют 4-вектор. В силу принципа суперпозиции сумма 4-векторов так же 4-вектор. Следовательно, потенциалы вида (5.2) всегда составляют 4-вектор (φ, **A**) для любого количества источников. Попутно из (5.4) следует вывод, что никаким выбором ИСО скалярный потенциал нельзя обратить в ноль.

Полный лагранжиан образуется присоединением к электромагнитному лагранжиану (5.2) лагранжиана свободной частицы L_m:

$$L_m = m_r c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,, \quad (5.5)$$

где m_r – масса частицы-приёмника; $v = |\mathbf{v}|$ – её скорость.

Подход к обоснованию вида лагранжиана свободной частицы (5.5) примерно одинаков во всех источниках (см., например, [2, §8]). Первое условие – это инвариантность величины действия $L_m dt$, что для интервала $\sqrt{1 - v^2/c^2}\,dt$ очевидно. Второе условие: при $v \ll c$ выражение (5.5) должно переходить в классическое – $m_r v^2/2$. Как видим, (5.5) удовлетворяет этим условиям, но в любом случае уравнение (5.5) это эмпирическая конструкция, подбираемая под заранее известный результат и не имеющая фундаментального физического обоснования.

По результатам настоящей работы можно предложить более конструктивную гипотезу происхождения лагранжиана свободной частицы.

Но об этом в следующем разделе, а пока в общепринятом порядке объединим (5.2) и (5.5) в полное уравнение электромагнитного лагранжиана (для соответствия классическому написанию перед лагранжианом поставлен знак минус):

$$L = -\left(m_r c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e_r \varphi - \frac{e_r}{c}\,\mathbf{vA} \right), \quad (5.6)$$

Для вывода закона движения частицы в электромагнитном поле стандартным образом подставляем (5.6) в уравнения Лагранжа (см. [2, §17]) и получаем в результате выражение для силы Лоренца:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}], \quad (5.7)$$

где в параметры **E** и **H** сгруппированы получившиеся по ходу решения выражения из потенциалов:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi; \quad (5.8.1)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}\,. \quad (5.8.2)$$

Таким образом, происходит переход к измеряемым внешним характеристикам поля действия – электрической **E** и магнитной **H** напряжённостям, которые разделяют силу действующую на заряд на две части – зависящую и не зависящую от скорости движения приёмника. Все величины в (5.8) в единицах SGS.

По ходу вывода уравнения лагранжиана точечного действия (4.7) не было повода говорить о какой-то неоднозначности «скрывающихся» там потенциалов. Но при переходе к работе с измеряемыми параметрами поля, которые вводятся через дифференциальные уравнения (5.8), естественно, возникает такая неоднозначность. Это позволяет применять в теории различные калибровки для упрощения математических построений.

На этом задача нахождения физического фундамента электромагнитного взаимодействия может считаться выполненной. Хотя выполненной она была уже при выводе уравнения электромагнитного лагранжиана в форме (4.7) или в единицах SGS (5.2) – (5.3). И теперь, как мы отмечали во введении, отработанный и подробно описанный в учебниках, но теперь уже фундаментально обоснованный переход от принципа наименьшего действия к уравнениям Максвелла совершён.

6. Свойства объёмного взаимодействия

Эту часть следует рассматривать как необязательное факультативное приложение, не влияющее на основной материал статьи. В *разделе 3* показано, что рассматриваемое фундаментальное действие делится на два вида – точечное и объёмное. С другой стороны, существует также два фундаментальных взаимодействия, действующих на расстоянии, – гравитационное и электромагнитное. Так как электромагнитное полностью уложилось в точечное действие, то остаётся предположить, что объёмное взаимодействие относится к гравитационному. Отметим принципиальное различие между двумя лагранжианами. Объёмный лагранжиан (4.8) не зависит от взаимной ориентации векторов скоростей приёмника и источника, поэтому в нём содержится только скалярный потенциал, который, собственно, и равен выражению (4.8). Конечно, гравитация – это уже общая теория относительности (ОТО), и в рамках СТО не получить законченного решения по гравитации, аналогичного полученному нами для электромагнитного взаимодействия, но нет причин не рассмотреть один частный случай, который является общим для всех классических взаимодействий: полный вид лагранжиана включает в себя лагранжиан L_m свободной частицы. Повторим его выражение из (5.5) (также без знака «минус», для удобства сравнения с последующими выражениями):

$$L_m = m_r c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,; \quad (6.1)$$

где m_r – масса частицы-приёмника в нашей терминологии.

Лагранжиан свободной частицы имеет форму (6.1) в ИСО, которая движется без ускорения относительно окружающего космического пространства. И даже в ОТО не опровергается гипотеза Маха, что это уравнение может быть результатом взаимодействия частицы со всеми окружающими космическими массами. Наличие одинаковых радикалов $\sqrt{1 - v^2 / c^2}$ в объёмном лагранжиане (4.8) и в лагранжиане (6.1) даёт повод проверить эту гипотезу. Предположим, что объёмный лагранжиан (4.8) соответствует гравитационному взаимодействию. Так же, как для точечного взаимодействия, перейдём в (4.8) от безразмерных единиц к энергетическим (гравитационным) с заменой коэффициента β: $\beta \Rightarrow G\frac{m_r m_s}{c}$, где G – гравитационная постоянная; m_r и m_s – массы приёмника и источника соответственно. В результате (4.8) преобразуется к виду:

$$L_\beta = G m_r m_s \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{R - \frac{\mathbf{VR}}{c}}, \quad (6.2)$$

$$\text{или } L_\beta = m_r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\psi, \quad (6.3)$$

где символом ψ обозначен потенциал гравитационного поля частицы-источника:

$$\psi = G m_s \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{R - \frac{\mathbf{VR}}{c}}. \quad (6.4)$$

Рассмотрим гравитационное действие на частицу-приёмник в космическом масштабе, где все источники действия можно считать точечными. Рассматриваем в самом простом приближении, не учитывая какие-либо космологические выводы ОТО и вообще никакие космические параметры и определения, кроме того, что предположим постоянными величинами плотность вещества и скорость света во всей Вселенной. В космическом масштабе мы имеем дело с самой наглядной моделью рассмотренного нами запаздывающего действия, когда параметры источника определяются именно в момент передачи действия. Согласно закону Хаббла, источник действия (например, звезда), находящийся от приёмника (наша частица) на расстоянии **R**, удаляется от точки измерения действия (t, **r**) со скоростью

$$\mathbf{V} = -H \cdot \mathbf{R}, \quad (6.5)$$

где H – постоянная Хаббла.

Скорость $\mathbf{V}$, измеренная сейчас по красному смещению, это та скорость, которую имел источник миллионы лет назад в момент передачи действия t_0 в точке $\mathbf{r}_0$, и расстояние R от источника мы сейчас видим именно как $R = c(t - t_0)$, потому что свет от источника действия, а следовательно, и его поле действия, пришли в точку нахождения приёмника именно в настоящий момент времени измерения t.Таким образом, точки приёма и передачи действия, как и положено, связаны уравнением запаздывания (2.2), и мы вправе использовать полученный на этом основании объёмный лагранжиан (4.8). Заменив в (6.4) скорость $\mathbf{V}$ на её выражение через постоянную Хаббла (6.5), получим:

$$\psi = G\rho 4\pi R^2 dR \frac{\sqrt{1 - \frac{(HR)^2}{c^2}}}{R\left(1 + \frac{HR}{c}\right)}, \quad (6.6)$$

где как ρ обозначена средняя плотность вещества и сделана замена: $m_s = \rho 4\pi R^2 dR$.

Сделаем в (6.6) замену переменных $x = (HR)/c$ и, учитывая,

что максимально возможное значение $HR = c$ при $x = 1$,

возьмем интеграл от выражения (6.6) по x в пределах от 0 до 1:

$$\psi = c^2 \frac{4\pi G\rho}{H^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, x dx. \quad (6.7)$$

Табличный интеграл по x в (6.7) равен $(1 - \pi/4) \approx 0.2$. В результате получаем:

$$\psi = c^2 \left(\frac{0.8\pi G\rho}{H^2}\right). \quad (6.8)$$

Если мы предполагаем, что (6.3) – это лагранжиан свободной частицы, то должно быть $\psi = c^2$, из чего следует, что выражение в скобках в (6.8) равно единице, то есть $\frac{0.8\pi G\rho}{H^2} = 1$, откуда получаем выражение для средней плотности вещества во Вселенной:

$$\rho = \frac{1.2 H^2}{\pi G} \quad (6.9)$$

Современная оценка плотности вещества во Вселенной считается примерно равной критической плотности: $\rho_c = \dfrac{3H^2}{8\pi G}$.

Конечно, полученное нами соотношение $\rho \approx 3\rho_c$ нельзя считать доказательством замкнутости Вселенной, но при всех упрощениях в исходных данных и полном игнорировании законов ОТО это соотношение является реальным результатом и косвенным обоснованием применимости лагражиана (4.8) к гравитационному взаимодействию двух тел. Естественно, в нашу тему не входит подробное рассмотрение гравитационного взаимодействия пары приёмник – источник. Но вопрос о том, как из (6.1) выделить гравитационное взаимодействие пары частиц, безальтернативно решается из простых соображений, что при скоростях приёмника и источника намного меньше скорости света мы должны получить классический закон тяготения Ньютона. Для этого из лагранжиана (6.1) достаточно вычесть лагранжиан (6.2). В результате, поставив знак «минус» перед лагранжианом, получаем полный гравитационный лагранжиан L_G:

$$L_G = -\left(m_r c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - G m_r m_s \frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{R - \dfrac{\mathbf{VR}}{c}} \right). \quad (6.10)$$

При V, v << c из (6.10) получаем классический лагранжиан гравитационного взаимодействия: $L_G = \dfrac{m_r v^2}{2} + G\dfrac{m_r m_s}{R}$. Других аргументов в пользу эмпирического уравнения (6.10) нет, а подробный анализ этого уравнения с целью подтверждения или опровержения требует отдельного исследования, которое никоим образом не входит в тему данной работы.

7. Заключение

В работе рассмотрено классическое действие (2.1) как фундаментальный физический процесс взаимодействия материальных объектов. Показано, что вид электромагнитного лагранжиана (4.7) определяется на самом нижнем уровне физических законов на основе симметрии пространства-времени, математическим выражением которой являются уравнения Лоренца, и переход к механизму дифференциальных уравнений Максвелла возможен естественным путём снизу вверх, начиная с фундаментальных законов СТО. В таком подходе отпадает необходимость в дополнении уравнений Максвелла законом движения (5.7), который является обязательным звеном цепочки преобразований.

Использование предложенного подхода к действию позволяет получить важнейшие уравнения запаздывающих потенциалов Лиенара-Вихерта (5.3) в полной форме лагранжиана (4.7) автоматически, как необходимое и достаточное условие инвариантности точечного действия. Р. Фейнман в [3, гл.21], показывая свой оригинальный вывод этих потенциалов, справедливо подчёркивает их значение: «Предпримем расчёт потенциалов точечного заряда, движущегося уже, как ему захочется (даже с релятивистской скоростью). Как только мы получим этот результат, у нас в руках окажутся электромагнитные свойства электрических зарядов во всей их полноте». В теории Максвелла не было и не могло быть понятия запаздывающих потенциалов отдельно взятого заряда. Выражения (5.3) были получены много позже – независимо А.-М. Лиенаром (1898) и Э. Вихертом (1900). Но тогда они не имели существенного влияния на теорию, потому, что получены были не как исходные физические величины, а как следствия уравнений Максвелла и электронной теории Лоренца.

В уравнениях (5.8) потенциалы (φ, **A**) используются в свёрнутом виде. Этих соотношений уже достаточно для решения большого класса задач электродинамики. Но для детализации, при переходе к полям отдельных зарядов, особенно при рассмотрении законов излучения, необходимо развернуть значения потенциалов в виде (5.3).

Математические проблемы при дифференцировании с учётом запаздывания вполне решаемы (см., например, [2, § 63]).

В результате получаются исчерпывающие выражения для полей **E** и **H,** создаваемых произвольно движущимся зарядом [2: (63.8)]. Можно сказать что это «закон Кулона в совершенном виде». Не выписывая всё громоздкое выражение, приведем вид этих уравнений в собственной системе источника, где скорость источника поля **V** = 0:

$$\mathbf{E} = e\frac{\mathbf{n}}{R^2} + e\frac{[\mathbf{n}[\mathbf{nW}]]}{c^2R}; \quad (7.1.1)$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{nE}]. \quad (7.1.2)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$; **W** – ускорение источника в момент передачи действия.

Не будем подробно анализировать этот упрощённый вариант уравнений, а покажем только, что «совершенный закон Кулона» (7.1) определяет в том числе и общие закономерности электромагнитного излучения. Для этого из (7.1.1) исключим исчезающий на больших расстояниях первый член, обратно пропорциональный квадрату расстояния. В результате получим уравнения для электрического и магнитного полей на большом удалении от ускоренно движущегося источника:

$$\mathbf{E} = -e\frac{\mathbf{W}_\perp}{c^2R}; \ \mathbf{H} = -e\frac{[\mathbf{nW}_\perp]}{c^2R}, \quad (7.2)$$

где $\mathbf{W}_\perp$ – составляющая ускорения источника, перпендикулярная направлению распространения поля **n**.

Согласно принципу запаздывания (2.2), поле действия распространяется со скоростью света, а значит, с такой же скоростью изменение **W** сказывается на изменении параметров **E** и **H** в удалённых точках пространства, то есть излучение распространяется со скоростью света. Далее из (7.2) следует, что величины напряжённостей спадают обратно пропорционально первой степени расстояния, Также видим, что векторы **E** и **H** всегда равны по величине и взаимно перпендикулярны. В свою очередь, оба вектора ортогональны к направлению распространения поля (поперечность электромагнитных волн). Все эти утверждения будут справедливы и для ускоренного движения группы частиц-источников, например в излучающей антенне, когда размеры антенны малы по сравнению с расстоянием действия. Напряжённости (7.2) в этом случае просто складываются по принципу суперпозиции.

В классике отсутствуют источники излучения, помимо ускоренно движущихся зарядов. Но введённый Максвеллом ток смещения (хотя и по причинам, не связанным с излучением) позволяет разорвать связь параметров излучения с параметрами источника излучения. В результате волновые уравнения Максвелла не определяют частоту излучения и степень его затухания, но показывают, что такое явление, в принципе, возможно, а причиной излучения, как выяснилось позднее, могут быть источники любой, в том числе и квантовой природы.

Вернёмся к исходному определению напряжённостей поля через потенциалы (5.8).Фактически в этих уравнениях просто вводятся обозначения для двух групп выражений из потенциалов. Первая группа – (**E**) – (5.8.1) характеризует силу, не зависящую от скорости движения частицы-приёмника; вторя группа – (**H**) – (5.8.2) относится к силе, связанной через векторное произведение со скоростью частицы-приёмника. Таким образом, в иерархии параметров, начиная с действия (2.1), напряжённости (**E**, **H**) занимают подчинённое положение по отношению к потенциалам (φ, **A**), кроме того, они являются величинами исключительно математического происхождения (меется в виду, что напряжённости не имеют фундаментального физического происхождения, не отрицая тот факт, что именно напряжённости (в средах – индукции) являются единственными силовыми характеристиками поля действия и основными параметрами измерения всех электромагнитных эффектов), характеризующими параметры гипотетического силового электромагнитного поля. Вот, например, мнение Р. Фейнмана по поводу этого воображаемого поля [3, гл. 20, § 3]: «У меня нет картины этого электромагнитного поля, которая была бы хоть в какой-то степени точной… Я не воображаю себе маленьких пучков линий поля, снующих туда и сюда; они не нравятся мне потому, что если бы я двигался с иной скоростью, то они бы исчезли… временами мне кажется, что гораздо правильнее была бы картина, включающая векторный и скалярный потенциалы, ибо последние, пожалуй, имеют больший физический смысл».

Здесь уточним, что потенциалы (φ, **A**) действительно имеют в какой-то степени «больший физический смысл» по сравнению с напряжённостями, но и они, в свою очередь, тоже являются лишь определёнными в (5.2) математическими составляющими действительно физической скалярной величины – точечного лагранжиана (4.7). В нашей концепции, это частота поступления квантов действия. Хотя с таким же успехом лагранжиан можно было определить как плотность вероятности поступления кванта действия. В этом случае величина действия как накопленная вероятность тоже очевидный релятивистский инвариант.

Возникает естественный вопрос: если нет физической интерпретации для **E** и **H**, то какой тогда смысл продвигаться вверх от потенциалов к уравнениям Максвелла? Здесь уместно провести аналогию с термодинамикой. Статистическая физика открыла физическую сущность температуры и давления как следствия движения молекул. И действительно, температура – это не физический объект, а измеряемая математическая характеристика скорости движения молекул. Только вот именно математическое уравнение $PV = \nu RT$ позволяет рассчитать параметры работы тепловой машины, турбины и холодильника, и трудно себе представить расчёт параметров этих механизмов через статистическое распределение скоростей молекул. Точно так же именно математические уравнения Максвелла для **E**, **H** (**D**, **B**) позволяют рассчитать характеристики самых что ни на есть физических электродвигателей, генераторов и передающие антенн.

Наглядной демонстрацией математического происхождения важнейших для практики законов, является, например, вывод закона электромагнитной индукции Фарадея из тех же определений (5.8).

Достаточно взять ротор от обеих частей уравнения (5.8.1), сделать в правой части замену $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{H}$, согласно (5.8.2), и с учётом того, что ротор градиента всегда равен нулю $(\mathrm{rot\,grad}\,\varphi = 0)$, получим дифференциальную форму закона электромагнитной индукции:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (7.3)$$

Так же просто из (5.8) можно получить так называемый закон отсутствия магнитных зарядов. Взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (5.8.2), учитывая, что дивергенция ротора всегда равна нулю ($\mathrm{div\,rot}\,\mathbf{A} = 0$), получим следующее уравнение Максвелла:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0, \quad (7.4)$$

Теорема о циркуляции магнитного поля с революционным током смещения выводится из принципа наименьшего действия более сложным путём, как, например, в [2, § 30]. Насколько математически безупречен этот и другие подобные выводы, обсуждать не будем и на решаемую задачу об основе электромагнетизма это никоим образом уже не влияет, впрочем, как не влияют и все действия после уравнений (5.3). Но важно отметить, что все следующие после (5.3) результаты и выводы, в том числе и показанные в настоящем разделе, получены без уравнений Максвелла и вообще без каких-либо ссылок на положения классической электродинамики. Можно вернуться назад и напрямую использовать исходное уравнение лагранжиана (4.7), не заменяя параметр α на заряды по (5.1). В результате с точностью до постоянного множителя получится уравнение для силы Лоренца (5.7), а далее можно вывести все остальные приведённые нами в работе уравнения, включая закон излучения (7.2) и уравнения Максвелла (7.3) и (7.4). Таким образом, самое общее понятие поля действия (2.1) приводит к выводу законов и закономерностей практической электродинамики. В предложенной концепции поля действия есть одно классическое белое пятно. Каким образом приёмник при движении в поле действия выбирает свой единственно возможный маршрут? Детализируем вопрос: почему приёмник при движении в этом поле от **a** к **b** выбирает путь с наименьшим (экстремальным) значением действия *S*:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L dt . \quad (7.5)$$

Ответ на этот вопрос даёт квантовая механика в концепции «интегралов по траекториям» [4]. В данном аспекте не важно, что это не релятивистская теория. Но важно отметить, что у предложенной здесь теории поля действия и квантовой теории «интегралов по траекториям» есть серьёзная точка соприкосновения: в обеих теориях объектом рассмотрения является безразмерная величина действия.

Р. Фейнман в [4], развивая идею П. Дирака [5], показал, что на квантовом уровне классическое действие *S* (7.5), деленное на постоянную Планка *ħ*, является фазой волновой функции перехода из точки **a** в точку **b** пространства(см.: [4, гл. 2, (2.15)]:

$$\varphi[\mathbf{r}(t)] = \mathrm{const}\, e^{i\frac{S[\mathbf{r}(t)]}{\hbar}} ,$$

где *S/ħ* – это безразмерное классическое действие (П. Дирак в [5] выражал сомнение в правомерности переноса в квантовую механику «уравнения Лагранжа самым прямым образом»), вычисляемое вдоль произвольной траектории $\mathbf{r}(t)$, а $\varphi[\mathbf{r}(t)]$ – амплитуда вероятности перехода из $\mathbf{a}$ в $\mathbf{b}$ по этой траектории.

Для вычисления полной вероятности перехода требуется суммирование этих амплитуд по всем возможным траекториям. Но для классической траектории всё упрощается, так как вклад в сумму дают только амплитуды по траекториям, близким к стационарной, в которой S экстремально, а остальные амплитуды взаимно уничтожатся из-за резко возрастающей разности фаз.

Этот результат, естественно, ничего не меняет в методах применения в классике принципа наименьшего действия, но придаёт процессу «законный ход». Объясняется, наконец, почему конструкция из кинетической и потенциальной энергий должна иметь экстремум при движении и почему он единственный. Р. Фейнман отметил [4, гл. 2 § 3]: «Именно так классические законы движения получаются из квантовых законов».

Что касается интерпретации объёмного лагранжиана (4.8) → (6.2) как гравитационного взаимодействия, то полученное выражение плотности вещества во Вселенной (6.9) является, можно сказать, «разумным результатом», не отвергающим, по крайней мере, такую интерпретацию. Эмпирически полученный гравитационный лагранжиан (6.10), как уже говорилось, в рамках данной работы не анализируется.

Список использованных источников

1 Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков [и др.]. М. : Высшая школа, 1970. 712 с. Ч. 4, гл. XXIX, § 2.

2 Ландау Л. Д. Теоретическая физика. – 7-е изд., испр. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1988. Т. II. 512 с.

3 Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. – 3-е изд. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс; пер. с англ. М. : Мир, 1977. Т. 6. 352 с.

4 Фейнман Р. Квантовая механика и интегралы по траекториям / Р. Фейнман, А. Хибс; под ред. В. С. Барашенкова; пер. с англ. Э. М. Барлита, Ю. Л. Обухова. М. : Мир, 1968. 382 с.

5 Dirac P. A. M. The Lagrangian in Quantum Mechanics. Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, Vol. 3, pp. 64–72, 1933.