УДК 517.9

Е.Н. Ломакина,
д-р физ.-мат. наук,
профессор кафедры математики и математических методов в экономике Хабаровского государственного университета экономики и права

ОЦЕНКИ ЧИСЕЛ ГИЛЬБЕРТА ОПЕРАТОРОВ ХАРДИ-СТЕКЛОВА

В работе исследовано асимптотическое поведение чисел Гильберта интегральных операторов Харди-Стеклова, действующих в пространствах Лебега из L^p в L^q при $1 < p, q < \infty$ на полуоси.

Ключевые слова: *числа Гильберта, оператор Харди-Стеклова, пространства Лебега.*

The article examines the asymptotic behavior of Hilbert numbers of Hardy-Steklov integral operators functioning in Lebesgue spaces from L^p to L^q where $1 < p, q < \infty$ is on the semiaxis.

Keywords: *Hilbert numbers, operator, Hardy-Steklov operators, Lebesgue spaces.*

В работе исследовано асимптотическое поведение чисел Гильберта интегральных операторов Харди-Стеклова, действующих в пространствах Лебега из L^p в L^q при $1 < p, q < \infty$ на полуоси. Оператор Харди-Стеклова

$$Hf(x) = v(x) \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} u(y) f(y) dy .$$

В настоящей статье рассматривается в случае, когда пределы интегрирования $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемые и строго возрастают на $(0, \infty)$;

2) $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(x) < \psi(x)$ для $x > 0$, $\varphi(\infty) = \psi(\infty) = \infty$.

В статьях [1–2] ранее были получены результаты для аппроксимативных и энтропийных чисел операторов Харди, которые будут использоваться для получения оценок на числа Гильберта.

Пусть $B(X,Y)$ – пространство всех линейных, ограниченных операторов действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y. *Энтропийные числа* $e_n(T)$, $n \in N$, *(e – числа)* оператора $T \in B(X,Y)$, определяются как точная нижняя грань множества всех чисел $\varepsilon > 0$, для которых существуют элементы $y_1, \dots, y_m \in Y$, где $m \le 2^{n-1}$ такие, что $T(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \{y_i + \varepsilon B_Y\}$, то есть

$$e_n(T) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \exists y_1, \dots, y_m \in Y,\ m \le 2^{n-1} \ : \ T(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \{y_i + \varepsilon B_Y\} \right\},$$

где $B_X = \{x \in X \ : \ \|x\|_X \le 1\}$ – единичный шар в X, а B_Y – единичный шар в Y.

Энтропийные числа обладают следующими свойствами:
для операторов $S, T \in B(X, Y)$ и $R \in B(Y, Z)$

(i) $\|T\| = e_1(T) \ge e_2(T) \ge \ldots \ge 0;$

(ii) $e_{n+m-1}(T+S) \le e_n(T) + e_m(S), \quad n, m \in N;$ (1)

(iii) $e_{n+m-1}(RT) \le e_n(T) \cdot e_m(R), \quad n, m \in N.$

Энтропийные числа тесно связаны с аппроксимативными числами и числами Гильберта линейных ограниченных операторов.

Приведем следующие определения: n-*е аппроксимативное число оператора* $T \in B(X, Y)$

$$a_n(T) = \inf \left\{ \|T - L\|_{X \to Y} \ : \ L : X \to Y, \ rankL \le n \right\}, \quad n \in N,$$

где $rankL = \dim R(L)$;

n-*е число Гильберта оператора* $T \in B(X, Y)$ задается по формуле

$$h_n(T) = \sup \left\{ a_n(FTE) \ : \ E \in B(\ell_2, X), \ F \in B(Y, \ell_2), \ \|E\| \le 1, \ \|F\| \le 1 \right\}.$$

Соотношения между указанными числами содержатся в следующей теореме.

Теорема 1. [3, с. 184], [4, с. 294]. Пусть $T \in B(X, Y)$. *Тогда*

(i) $h_n(T) \le 2e_n(T), \quad h_n(T) \le a_n(T);$

(ii) $\sup\limits_n n^{\alpha} e_n(T) \le C_{\alpha} \sup\limits_n n^{\alpha} a_n(T),$ *для любого* $\alpha > 0.$

Пусть $1 < p < \infty$. Обозначим $L_p(R^+)$ пространство Лебега всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p(R^+)} = \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определим операторы $S : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ при $1 < p, q < \infty$

$$Sf(x) = v(x) \int_0^{\psi(x)} u(y) f(y) dy, \tag{2}$$

и $K : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ при $1 < p, q < \infty$

$$Kf(x) = v(x) \int_{\varphi(x)}^{\infty} u(y) f(y) dy, \tag{3}$$

где весовые функции $u(y) \in L_{p'}(R^+)$, $v(x) \in L_q(R^+)$ и пределы интегрирования $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – возрастающие дифференцируемые функции такие, что $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$, $\varphi(x)<\psi(x)$ для $x \in (0,\infty)$ и $\varphi(\infty)=\psi(\infty)=\infty$.

Критерии об ограниченности и компактности операторов (2) и (3) содержатся в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$. *Тогда*

(a1) Оператор S *ограничен из* $L_p(R^+)$ *в* $L_q(R^+)$ *тогда и только тогда, когда*

$$A_1 = \sup_{t \rhd 0} A_\psi(t) = \sup_{t \rhd 0} \left(\int_0^{\psi(t)} |u(y)|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_t^\infty |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

причем $\|S\|_{L_p(R^+) \to L_q(R^+)} \approx A_1$.

Оператор $S : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$A_1 < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{t \to 0} A_\psi(t) = \lim_{t \to \infty} A_\psi(t) = 0.$$

(a2) Оператор K *ограничен из* $L_p(R^+)$ *в* $L_q(R^+)$ *тогда и только тогда, когда*

$$A_2 = \sup_{t \rhd 0} A_\varphi(t) = \sup_{t \rhd 0} \left(\int_{\varphi(t)}^\infty |u(y)|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^t |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

причем $\|K\|_{L_p(R^+) \to L_q(R^+)} \approx A_2$.

Оператор $K : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$A_2 < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{t \to 0} A_\varphi(t) = \lim_{t \to \infty} A_\varphi(t) = 0.$$

Пусть $1 < q < p < \infty$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Тогда*

(b1) *Если оператор* S *ограничен из* $L_p(R^+)$ *в* $L_q(R^+)$, *то*

$$D_1 = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^{\psi(x)} |u(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{s}{p'}} \left(\int_x^\infty |v(y)|^q dy \right)^{\frac{s}{q}-1} |v(x)|\, dx \right)^{\frac{1}{s}} < \infty,$$

кроме того, $\|S\|_{L_p(R^+)\to L_q(R^+)} \approx D_1.$

Оператор $S: L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$D_1 < \infty.$$

(b2) *Если оператор* K *ограничен из* $L_p(R^+)$ *в* $L_q(R^+)$*, то*

$$D_2 = \left(\int_0^\infty \left(\int_{\varphi(x)}^\infty |u(t)|^{p'}\, dt \right)^{\frac{s}{p'}} \left(\int_0^x |v(y)|^q\, dy \right)^{\frac{s}{q}-1} |v(x)|\, dx \right)^{\frac{1}{s}} < \infty,$$

кроме того, $\|K\|_{L_p(R^+)\to L_q(R^+)} \approx D_2.$

Оператор $K: L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ *компактен в том и только в том случае,*

если $D_2 < \infty.$

Доказательство теоремы следует заменой переменных из известных результатов об ограниченности и компактности оператора Харди (см., например, [5, с. 41] § 1.3).

Введем следующие обозначения: для интегрального оператора $S: L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ пусть последовательность $\{\xi_n\}_{n\in Z}$ задана формулой

$$U(\psi(\xi_n)) = \int_0^{\psi(\xi_n)} |u(t)|^{p'} dt = 2^n, \quad -\infty < n \le N_\psi \le \infty.$$

Определим

$$\sigma_n = \|u\|_{L_{p'}(\psi(\xi_n),\psi(\xi_{n+1}))} \|v\|_{L_q(\xi_n,\, \xi_{n+1})}$$

и положим

$$\left(\sum_{n\in Z} \tilde{\sigma}_n^r \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{n\in Z} 2^{\frac{nr}{p'}} \left(\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} |v(x)|^q\, dx \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \left(\sum_{n\in Z} \|u\|^r_{L_{p'}(\psi(\xi_n),\psi(\xi_{n+1}))} \|v\|^r_{L_q(\xi_n,\, \xi_{n+1})} \right)^{\frac{1}{r}},$$

где $\frac{1}{r}=\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}$.

Аналогично, для интегрального оператора $K:L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ зададим последовательность $\{\tau_n\}_{n\in Z}$ следующим равенством

$$U(\varphi(\tau_n))=\int_{\varphi(\tau_n)}^{\infty}|u(t)|^{p'}dt=2^{-n},\quad -\infty\le N_\varphi\le n<\infty,$$

положим

$$\tilde{\kappa}_n=\|u\|_{L_{p'}(\varphi(\tau_n),\varphi(\tau_{n+1}))}\|v\|_{L_q(\tau_n,\tau_{n+1})}$$

и $\left(\sum_{n\in Z}\tilde{\kappa}_n^r\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\sum_{n\in Z}\|u\|^r_{L_{p'}(\varphi(\tau_n),\varphi(\tau_{n+1}))}\|v\|^r_{L_q(\tau_n,\tau_{n+1})}\right)^{\frac{1}{r}}.$

Теорема 3. *Предположим, что весовые функции* $u(y)\in L_{p'}(R^+),\ \ v(x)\in L_q(R^+)$, *$1<p,q<\infty$, такие, что операторы* $S:L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ и $K:L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ *определенные формулами (2), (3) компактны.*

(1) Пусть $\Delta=(a,b)\subset R^+$, $J=(\psi(a),\psi(b))$, $I=(\varphi(a),\varphi(b))$, $S:L_p(J)\to L_q(\Delta)$, $K:L_p(J)\to L_q(\Delta)$. *Тогда выполняются следующие оценки:*

$$c_1(p,q)\left(\int_\Delta|u(\psi(x))|^r|v(x)|^r(\psi'(x))^{\frac{r}{p'}}dx\right)^{1/r}\le\liminf_{n\to\infty} n e_n(S)\le$$

$$\le\limsup_{n\to\infty} n e_n(S)\le c_2(p,q)\left(\int_\Delta|u(\psi(x))|^r|v(x)|^r(\psi'(x))^{\frac{r}{p'}}dx\right)^{1/r}$$

и

$$c_1(p,q)\left(\int_\Delta|u(\varphi(x))|^r|v(x)|^r(\varphi'(x))^{\frac{r}{p'}}dx\right)^{1/r}\le\liminf_{n\to\infty} n e_n(K)\le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} n e_n(K) \le c_2(p,q)\left(\int_{\Delta} |u(\varphi(x))|^r |v(x)|^r (\varphi'(x))^{\frac{r}{p'}} dx\right)^{1/r}.$$

(2) *Пусть* $\sum_{n\in Z} \tilde{\sigma}_n^r < \infty$, $\sum_{n\in Z} \tilde{\kappa}_n^r < \infty$. *Тогда*

$$c_1(p,q)\left(\int_0^{\infty} |u(\psi(x))|^r |v(x)|^r (\psi'(x))^{\frac{r}{p'}} dx\right)^{1/r} \le \liminf_{n\to\infty} n e_n(S) \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} n e_n(S) \le c_2(p,q)\left(\int_0^{\infty} |u(\psi(x))|^r |v(x)|^r (\psi'(x))^{\frac{r}{p'}} dx\right)^{1/r}$$

и

$$c_1(p,q)\left(\int_0^{\infty} |u(\varphi(x))|^r |v(x)|^r (\varphi'(x))^{\frac{r}{p'}} dx\right)^{1/r} \le \liminf_{n\to\infty} n e_n(K) \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} n e_n(K) \le c_2(p,q)\left(\int_0^{\infty} |u(\varphi(x))|^r |v(x)|^r (\varphi'(x))^{\frac{r}{p'}} dx\right)^{1/r}.$$

Доказательство. Заменой переменной $y = \psi(t)$ получаем

$$Sf(x) = v(x)\int_0^{\psi(x)} u(y)\, f(y)\, dy = v(x)\int_0^{x} u(\psi(t))\, f(\psi(t))\psi'(t)\, dt.$$

Отсюда следует, что оператор $S = \Omega \circ \Psi$ является суперпозицией метрического изоморфизма

$$\Psi : L_p(R^+) \to L_q(R^+),\ \Psi : f(t) \to f(\psi(t))[\psi'(t)]^{1/p}$$

и оператора $\Omega : L_p(R^+) \to L_q(R^+)$

$$\Omega g(x) = v(x)\int_0^{x} u_{\psi}(t) g(t) dt,$$

где $u_\psi(t)=u(\psi(t))[\psi'(t)]^{1/p}$. В силу свойств e – чисел (1) имеем

$e_n(S)\le\|\Psi\|\cdot e_n(\Omega)$, а также $e_n(\Omega)\le\left\|\Psi^{-1}\right\|\cdot e_n(S)$.

Поскольку $\|\Psi\|_{L_p\to L_p}=\left\|\Psi^{-1}\right\|_{L_p\to L_p}=1$, то $e_n(S)=e_n(\Omega)$.

Поэтому, используя результаты [2, с. 36] (теоремы 4.6, 4.10), получаем требуемые оценки. Асимптотические оценки для оператора K выводятся аналогично заменой $y=\varphi(t)$.

Следствие 1. *Предположим, что весовые функции* $u(y)\in L_{p'}(R^+)$, $v(x)\in L_q(R^+)$, *1< p, q < ∞, такие, что операторы* $S:L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ и $K:L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ *определенные формулами (2), (3) компактны и* $\sum\limits_{n\in Z}\tilde{\sigma}_n^r<\infty$, $\sum\limits_{n\in Z}\tilde{\kappa}_n^r<\infty$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} n\,h_n(S)\le c(p,q)\left(\int_0^\infty\left|u(\psi(x))\right|^r\left|v(x)\right|^r(\psi'(x))^{\frac{r}{p'}}dx\right)^{1/r},$$

$$\limsup_{n\to\infty} n\,h_n(K)\le c(p,q)\left(\int_0^\infty\left|u(\varphi(x))\right|^r\left|v(x)\right|^r(\varphi'(x))^{\frac{r}{p'}}dx\right)^{1/r}.$$

Далее рассмотрим интегральный оператор Харди-Стеклова $H:L_p(R^+)\to L_q(R^+)$ с переменной областью интегрирования вида

$$Hf(x)=v(x)\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}u(y)\,f(y)\,dy. \qquad (4)$$

Для исследований асимптотики e-чисел и чисел Гильберта оператора (4) построим специальное разбиение полуоси $(0,\infty)=\bigcup\limits_{\kappa}\Delta_\kappa$, где $\Delta=[\zeta_k,\zeta_{k+1}]$ *и* $\delta_k=[\eta_k,\eta_{k+1}]$ определяются для $k\in Z$ следующим образом:

$$\zeta_0 = 1, \quad \eta_0 = \varphi(1), \quad \eta_1 = \psi(1), \quad \zeta_{\kappa+1} = (\varphi^{-1} \circ \psi)^{\kappa}(1), \ k \in Z,$$

$$\eta_k = \psi(\varphi^{-1} \circ \psi)^{k-1}, \ k \in Z.$$

Используя асимптотические оценки аппроксимативных чисел оператора (4), полученные в работе [1, с. 180], оценки теоремы 1 (ii), получаем оценки для энтропийных чисел и чисел Гильберта оператора Харди-Стеклова H с переменными пределами интегрирования.

Пусть последовательности $\{\xi_{k,n}\} \in \Delta_k$ *и* $\{\tau_{k,n}\} \in \Delta_k$ заданы следующими соотношениями:

$$\int_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(\xi_{k,n})} |u(t)|^{p'} dt = 2^n, \qquad \int_{\varphi(\tau_{k,n})}^{\varphi(\zeta_{k+1})} |u(t)|^{p'} dt = 2^{-n}.$$

Определим

$$\sigma_{k,n} = \left(\int_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(\zeta_{k,n})} |u(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\xi_{k,n}}^{\xi_{k,n+1}} |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

и $$\kappa_{k,n} = \left(\int_{\varphi(\zeta_k)}^{\varphi(\zeta_{k,n})} |u(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\tau_{k,n}}^{\tau_{k,n+1}} |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 4. *Пусть 1 < p < ∞, оператор* $H : L_p(R^+) \to L_p(R^+)$ *компактен и* $\sum_k \sum_n \sigma_{k,n} < \infty$, $\sum_k \sum_n \kappa_{k,n} < \infty$. *Тогда выполняются следующие оценки:*

$$\limsup_{n\to\infty} n e_n(H) \le C(p) \int_0^\infty |v(x)| \left(|u(\varphi(x))| (\varphi'(x))^{\frac{1}{p'}} + |u(\psi(x))| (\psi'(x))^{\frac{1}{p'}} \right) dx,$$

$$\limsup_{n\to\infty} n h_n(H) \le C_1(p) \int_0^\infty |v(x)| \left(|u(\varphi(x))| (\varphi'(x))^{\frac{1}{p'}} + |u(\psi(x))| (\psi'(x))^{\frac{1}{p'}} \right) dx,$$

где $C(p), C_1(p)$ *– некоторые положительные константы, зависящие только от* p.

Используя теорему 1 и результаты [3, с. 194], получаем оценки чисел Гильберта для диагональных операторов.

Следствие 2. *Пусть диагональный оператор* $D:\ell_2(R^+)\to\ell_2(R^+)$ *таков, что* $D(\xi_n)=(\sigma_n\xi_n)$, и $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3\geq\ldots\geq 0$. *Тогда*

$$\left(\sum_1^\infty h_n(D)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\rho_\alpha\left(\sum_1^\infty|\sigma_n|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}},\quad \text{для } 0<\alpha<\infty,$$

где ρ_α *– некоторая положительная константа.*

Список использованных источников

1 Ломакина Е. Н. Оценки аппроксимативных чисел одного класса интегральных операторов I / Е. Н. Ломакина // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44. № 1. С. 178–192.

2 Lifshits M. A., Linde W. Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion // Mem. Am. Math. Soc. V. 745, P. 1–87.

3 Пич А. Операторные идеалы / А. Пич. М. : Мир, 1982.

4 Carl B. Entropy numbers, s-numbers and eigenvalue problems // J. Funct. Anal. 1981. 41. P. 290–306.

5 Мазья В. Г. Пространства С.Л. Соболева / В. Г. Мазья. Л. : ЛГУ, 1985.