УДК 51

Е.Н. Ломакина,
д-р физ.-мат. наук,
профессор кафедры математики и математических методов в экономике Хабаровского государственного университета экономики и права

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ДЕЙСТВУЮЩЕГО В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Грант правительства Хабаровского края на реализацию проектов в области научных исследований в направлении естественных и технических наук № 24С//2019.
Grant № 24C//2019 of the Government of Khabarovsk Krai for the implementation of projects in the field of research in the direction of natural and technical sciences.

В статье получен критерий ограниченности одновесового оператора Харди, действующий в весовых пространствах Лоренца $T:\ L_v^{rs} \to L_\omega^{pq}$ *в случае* $1 < p, q < \infty,\ \ 1 < r, s < \infty$ *и* $max\,\{r, s\} \le q$ *вида* $Tf(x) = \int_0^x u(\tau) f(\tau) d\tau,\ x > 0$.

Ключевые слова: *интегральный оператор, оператор Харди, банаховы функциональные пространства, пространства Лоренца.*

The article considers a criterion of boundedness of single-weight Hardy operator acting in Lorentz weight spaces $T:\ L_v^{rs} \to L_\omega^{pq}$ *in case of* $1 < p, q < \infty,\ \ 1 < r, s < \infty$ *and* $max\,\{r, s\} \le q$ *type* $Tf(x) = \int_0^x u(\tau) f(\tau) d\tau,\ x > 0$.

Keywords: *integral operator, Hardy operator, Banach functional spaces, Lorentz spaces.*

Введение

Линейное нормированное пространство $X = \{f:\ \|f\|_X < \infty\}$ вещественнозначных измеримых по Лебегу функций на полуоси называется *банаховым функциональным пространством*, если в дополнении к обычным аксиомам нормированного пространства также выполнены следующие свойства:

(1) $\|f\|_X$ определена для каждой измеримой по Лебегу функции f на полуоси, и $f \in X$ в том и только в том случае, если $\|f\|_X < \infty$;

$\|f\|_X = 0$ в том и только в том случае, если $f = 0$ почти всюду (п.в.);

(2) $\|f\|_X = \|\,|f|\,\|_X$ для всех $f \in X$;

(3) если $0 \le f \le g$ п.в., то $\|f\|_X \le \|g\|_X$;

(4) если $0 \le f \uparrow g$ п.в., то $\|f\|_X \uparrow \|g\|_X$;

(5) если $E \subset X$, $mesE < \infty$, то $\|\chi_E\|_X < \infty$;

(6) если $mesE < \infty$, то $\int_E f(x)\,dx \le C_E \|f\|_X$.

Например, пространство Лебега $L^p = L^p(\mathbb{R}, d\mu)$ измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \underset{\mathbb{R}}{esssup}\,|f|, & p = \infty, \end{cases}$$

является банаховым функциональным пространством.

Также банаховыми функциональными пространствами являются пространства Лоренца, которые будем рассматривать в разделе 2.

Теория банаховых функциональных пространств подробно изложена в монографии [1].

Пусть $X = (X, v)$, $Y = (Y, \omega)$ – два весовых банаховых функциональных пространства измеримых функций, заданных на $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$,

где весовые функции $v(x)$, $\omega(x)$ измеримые по Лебегу, положительные и конечные почти всюду на $(0, \infty)$.

Рассмотрим интегральный оператор Харди $T: X \to Y$ вида

$$Tf(x) = \int_0^x u(\tau) f(\tau) d\tau, \; x > 0, \qquad (1.1)$$

где неотрицательная весовая функция $u(\tau) \in X'$.

Для данного банахова функционального пространства X *двойственным пространством* X' является пространство $X' = \{g : \int_0^\infty |fg| < \infty \; \text{для всех} \; f \in X\}$,

снабженное нормой

$$\|g\|_{X'} = sup\{\int_0^\infty |fg| : \|f\|_X \le 1\}. \qquad (1.2)$$

Пространство X' также является банаховым функциональным пространством, причем равенство

$$\|f\|_X = sup\{\int_0^\infty |fg| : \|g\|_{X'} \le 1\} \qquad (1.3)$$

выполняется для всех $f \in X$. Пространства X и X' являются полными линейными нормированными пространствами и $X'' = X$. [1]

Неравенство Гельдера

$$\left|\int_0^\infty fg\right| \le \|f\|_X \|g\|_{X'} \qquad (1.4)$$

выполняется для всех $f \in X$ и $g \in X'$.

Принцип двойственности. $T: X \to Y$ является ограниченным линейным оператором таким, что $\|Tf\|_X \le C\|f\|_X$ для всех $f \in X$ с положительной константой C тогда и только тогда, когда

(i) $\|T'g\|_{X'} \le C\|g\|_{Y'}$

(ii) для всех $g \in Y'$,

(iii) где двойственный оператор $T': Y' \to X'$ определяется по формуле

(iv)

$$\int_0^\infty (Tf)\, g = \int_0^\infty f(T'g), \tag{1.5}$$

или

(v) $\left|\int_0^\infty (Tf)\, g\right| \le C\|f\|_X\|g\|_{Y'}$ для всех $f \in X$ и $g \in Y'$, (1.6)

с некоторой константой C.

Положительная константа C определяет норму $\|T\|$, и, таким образом,

$$\|T\|_{X\to Y} = \|T'\|_{Y'\to X'}.$$

Двойственный оператор $T': Y' \to X'$ и

$$\int_0^\infty Tf(x)\,g(x)\,\omega(x)\,dx = \int_0^\infty T'g(x)\,f(x)\,v(x)\,dx. \tag{1.7}$$

Пространства Лоренца

Если измеримая функция f определена на измеримом пространстве $((0,\infty), v(x)\,dx)$.

Для $1 < r, s < \infty$, весовой функция $v(x)$ на $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, пространство Лоренца $L_v^{rs} = L_v^{rs}(\mathbb{R}^+)$ состоит из всех измеримых функций f таких, что

$$\|f\|_{L_v^{rs}} = \left(\int_0^\infty \frac{s}{r} t^{\frac{s}{r}-1} (f_v^*(t))^s\,dt\right)^{1/s} < \infty, \tag{2.1}$$

где невозрастающая перестановка f_v^* функции f относительно $v(x)dx$ определяется следующим образом

$$f_v^*(t) = \inf\{\lambda > 0 :\ v(\{x > 0 : |f(x)| > \lambda\}) \le t\}. \tag{2.2}$$

Заметим, что $v(E) = \int_E v(x)dx$, и $\|f\|_{L_v^{rr}} = \|f\|_{L_v^r} = \left(\int_0^\infty |f(t)|^r v(t)dt\right)^{1/r}$.

Пространство Лоренца L_v^{rs} является банаховым фнкциональным пространством, если $1 \le s \le r, 1 < s < r < \infty$. Если же $1 < r < s < \infty$, то L_v^{rs} будет банаховым фнкциональным пространством относительно другой нормы, эквивалентной (2.1):

$$\|f\|_{L_v^{rs}} = \left(\int_0^\infty \frac{s}{r} t^{\frac{s}{r}-1} (f_v^{**}(t))^s dt\right)^{1/s},$$

где $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(\tau)d\tau, \quad t > 0$.

Пространства Лоренца L_v^{rs} обладают абсолютно непрерывными нормами. Напомним, что норма в банаховом функциональном пространстве X *абсолютно непрерывна,* если для всех $f \in X$, $\|f\chi_{E_n}\|_X \to 0$ для каждой последовательности множеств $\{E_n\} \subset \mathbb{R}^+$ таких, что $\chi_{E_n}(x) \to 0$ п.в.

Для пространства L_v^{rs}, *двойственным пространством* $L_v^{r's'}$ является пространство

$$L_v^{r's'} = \left\{g : \int_0^\infty |fg| < \infty \ \text{для всех} \ f \in L_v^{rs}\right\}, \tag{2.3}$$

снабженное нормой

$$\|g\|_{L_v^{r's'}} = \sup\left\{\int_0^\infty |f(x)g(x)v(x)dx| : \|f\|_{L_v^{rs}} \le 1\right\}. \tag{2.4}$$

Неравенство Гельдера

$$\left|\int_0^\infty f(x)g(x)v(x)dx\right| \le \|f\|_{L_v^{rs}}\|g\|_{L_v^{r's'}}, \tag{2.5}$$

где

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1, \ \ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1, \qquad 1 < r < \infty, \ \ 1 \le s \le \infty$$

и

$$\|f\|_{L_v^{rs}} = \sup_{\|g\|_{L_v^{r's'}} \le 1} \left|\int_0^\infty f(x)g(x)v(x)dx\right|. \tag{2.6}$$

Нашей целью является получение критерия ограниченности, оператора Харди, действующего в весовых пространствах Лоренца $T : L_v^{rs}(\mathbb{R}^+) \to L_\omega^{pq}(\mathbb{R}^+)$ в области

$1 < p, q < \infty$, $1 < r, s < \infty$ и $max\,\{r,s\} \le q$ вида

$$Tf(x) = \int_0^x u(\tau) f(\tau) d\tau,\ x > 0, \qquad (2.7)$$

где неотрицательная весовая функция $u(\tau) \in L^{r's'}(0,x)$ для всех $x > 0$.

Мы исследуем более общий оператор, чем в статье [2], и другой случай индексов, чем результаты исследований [3]. Доказательство достаточности в критерии ограниченности оператора проводится с помощью принципа двойственности банаховых функциональных пространств.

Ограниченность оператора Харди в пространствах Лоренца

Для доказательства ограниченности оператора (2.7) необходима следующая лемма.

Лемма 1 [2]. *Пусть* $1 < r, s < \infty$, $\max\{r,s\} \le q$, *и* $\{E_k\}$ – *последовательности измеримых, попарно непересекающихся интервалов таких, что* $\cup E_k = (0, \infty)$.

Тогда

$$\Sigma_k \|\chi_{E_k} f\|^q_{L^{rs}_v} \le \|f\|^q_{L^{rs}_v}. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Используя неравенство Минковского с параметром $\frac{s}{q} \le 1$ и неравенство Йенсена при $\frac{q}{r} \ge 1$, получаем

$$\Sigma_k \|\chi_{E_k} f\|^q_{L^{rs}_v} = \Sigma_k \left(\int_0^\infty (\chi_{E_k} f)_*(t)^{s/r} s t^{s-1} dt\right)^{q/s} \le \left(\int_0^\infty \left(\Sigma_k (\chi_{E_k} f)_*(t)^{q/r}\right)^{s/q} s t^{s-1} dt\right)^{q/s}$$
$$\le \left(\int_0^\infty f_*(t)^{s/r} s t^{s-1} dt\right)^{q/s} = \|f\|^q_{L^{rs}_\omega}. \ \square$$

Критерии ограниченности оператора (2.7) содержатся в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $1 < r, s < \infty$, $max\,\{r,s\} \le q$. *Оператор* $T : L^{rs}_v(\mathbb{R}^+) \to L^{pq}_\omega(\mathbb{R}^+)$ *вида* (2.7) *ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{A} = sup_{t>0} A(t) = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \omega(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \|\chi_{(0,t)} u/v\|_{L^{r's'}_v} < \infty. \qquad (3.2)$$

Более того, $A \le \|T\|_{L^{rs}_v \to L^{pq}_\omega} \le 4A$.

Доказательство. *Необходимость.* Если $T : L^{rs}_v(\mathbb{R}^+) \to L^{pq}_\omega(\mathbb{R}^+)$ ограничен, тогда, используя аксиомы (2), (3) банахова функционального пространства для произвольного $t > 0$ и всех неотрицательных $f \in L^{rs}_v(\mathbb{R}^+)$ таких, что $f(y)u(y) \geq 0$, получаем

$$\|T\|_{L_v^{rs} \to L_\omega^{pq}} \|f\|_{L_v^{rs}} \geq \|Tf\|_{L_\omega^{pq}} = \left\| \int_0^x u(y) f(y) dy \right\|_{L_\omega^{pq}}$$
$$\geq \|\chi_{[t,\infty)}\|_{L_\omega^{pq}} \int_0^t u(y) f(y) dy = \|\chi_{[t,\infty)}\|_{L_\omega^{pq}} \int_0^\infty \chi_{[0,t]}(y) u(y) f(y) dy.$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\|\chi_{[t,\infty)}\|_{L_\omega^{pq}} \int_0^\infty \chi_{[0,t]}(y) u(y) f(y) dy \leq \|T\|_{L_v^{rs} \to L_\omega^{pq}} \|f\|_{L_v^{rs}}.$$
$$\sup_{\|f\|_{L_v^{rs}} \leq 1} \|\chi_{[t,\infty)}\|_{L_\omega^{pq}} \int_0^\infty \chi_{[0,t]}(y) u(y) v^{-1}(y) f(y) v(y) dy \leq \sup_{\|f\|_{L_v^{rs}} \leq 1} \|T\|_{L_v^{rs} \to L_\omega^{pq}} \|f\|_{L_v^{rs}}.$$

Полагая $g(y) = \chi_{[0,t]}(y) u(y) v^{-1}(y)$ и учитывая,

что $f(y)u(y) \geq 0$, в силу формулы (2.4), получаем

$$\sup_{\|f\|_{L_v^{rs}} \leq 1} \int_0^\infty \chi_{[0,t]}(y) u(y) v^{-1}(y) f(y) v(y) dy = |\chi_{[0,t]} u v^{-1}|_{L_v^{r's'}}.$$
$$\mathrm{A}(t) = \|\chi_{[t,\infty)}\| \cdot |\chi_{[0,t]} u v^{-1}|_{L_v^{r's'}} \leq \|T\|_{L_v^{rs} \to L_\omega^{pq}}.$$

Следовательно, $A \leq \|T\|_{L_v^{rs} \to L_\omega^{pq}}$ для всех $t > 0$, и оценка снизу доказана.

Достаточность. Из принципа двойственности следует,

что для оценки сверху достаточно доказать неравенство

$$\int_0^\infty Tf(x)\, g(x)\, \omega(x)\, dx \leq C \|f\|_{L_v^{rs}} \|g\|_{L_\omega^{p'q'}}$$

для всех $f \in L_v^{rs}(\mathbb{R}^+)$ и $g \in L_\omega^{p'q'}(\mathbb{R}^+)$.

По условию $1 < p, q < \infty$, $1 < r, s < \infty$ и $max\,\{r, s\} \leq q$.

Предположим, что $f(\tau)u(\tau) \geq 0$. Пусть $m \in \mathrm{Z}$ такое, что $\int_0^\infty u(\tau) f(\tau) d\tau \in (2^m, 2^{m+1}]$.

Тогда найдется возрастающая последовательность $\{x_k\}_{k=-\infty}^m$,

что для $k \leq m-1$ выполняется

$$2^k = \int_0^{x_k} u(\tau) f(\tau) d\tau = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(\tau) f(\tau) d\tau, \qquad (3.3)$$

и

$$2^m = \int_0^{x_m} u(\tau) f(\tau) d\tau. \qquad (3.4)$$

Положим $E_k = [x_k, x_{k+1})$, $k \le m-1$, а $x_{m+1} = \infty$.

Таким образом, получаем последовательность попарно непересекающихся интервалов $\{E_k\}$ таких, что

$$\bigcup_{k \le m} E_k = (0, \infty). \qquad (3.5)$$

Если $\int_0^\infty u(\tau) f(\tau) d\tau = \infty$, тогда (3.3) выполняется для всех $k \in \mathbb{Z}$ и (3.4) остается справедливым. В силу формул (3.3) и (3.4) заключаем, что

$$Tf(x) \le 2^{k+1} \text{ для } x \in E_k, \; k \le m. \qquad (3.6)$$

$$\int_0^\infty Tf(x) g(x)\omega(x)\,dx \le \sum_{k \le m} 2^{(k+1)} \int_{E_{k+1}} g(x)\omega(x)\,dx$$

$$= 4 \sum_{k \le m} (2^k - 2^{k-1}) \int_{E_{k+1}} g(x)\omega(x)\,dx$$

$$\le 4 \sum_{k \le m} \int_{E_k} u(\tau) f(\tau)\,d\tau \int_{E_{k+1}} g(x)\omega(x)\,dx \le$$

$$\le 4 \sum_{k \le m} \|\chi_{E_k} f\|_{L_v^{rs}} \|\chi_{E_k} u/v\|_{L_v^{r's'}} \|\chi_{E_{k+1}}\|_{L_\omega^{pq}} \|\chi_{E_{k+1}} g\|_{L_\omega^{p'q'}}$$

$$\le 4 \sum_{k \le m} \|\chi_{E_k} f\|_{L_v^{rs}} \|\chi_{[0,t]} u/v\|_{L_v^{r's'}} \|\chi_{[t,\infty)}\|_{L_\omega^{pq}} \|\chi_{E_{k+1}} g\|_{L_\omega^{p'q'}}$$

$$\le 4A \sum_{k \le m} \|\chi_{E_k} f\|_{L_v^{rs}} \|\chi_{E_{k+1}} g\|_{L_\omega^{p'q'}} \le 4A \left(\sum_{k \le m} \|\chi_{E_k} f\|^q_{L_v^{rs}}\right)^{1/q} \left(\sum_{k \le m} \|\chi_{E_{k+1}} g\|^{q'}_{L_\omega^{p'q'}}\right)^{1/q'}$$

$$\le 4A \|f\|_{L_v^{rs}} \|g\|_{L_\omega^{p'q'}}.$$

Следовательно, $\|T\|_{L_v^{rs} \to L_\omega^{pq}} \le 4A$. □

Список использованных источников

1 Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. Pure Appl. Math. 129, Academic Press, 1988.

2 Sawyer E.T. Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator. // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 281. P. 329–337.

3 Lomakina E., Stepanov V. On the compactness and approximation numbers of Hardy type integral operators in Lorentz spases.// J. London Math. Soc. (2) 1996. V. 53. P. 369–382.